

# Analyse

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| Analyse .....                                         | 1  |
| 1. Limites de polynômes en l'infini.....              | 2  |
| 2. Limites de fonctions rationnelles en l'infini..... | 3  |
| 3. Asymptotes .....                                   | 4  |
| 4. Limites d'autres fonctions en l'infini .....       | 6  |
| 5. Théorème de comparaison.....                       | 7  |
| 6. Dérivées .....                                     | 8  |
| 7. Dérivées – Logarithme et exponentielle.....        | 10 |
| 8. Tangentes.....                                     | 12 |
| 9. Limites avec la fonction logarithme népérien ..... | 14 |
| 10. Limites avec la fonction exponentielle .....      | 16 |
| 11. Limites avec des fonctions puissances.....        | 18 |
| 12. Calculer une limite à l'aide de la dérivée .....  | 19 |
| 13. Prolongement par continuité.....                  | 20 |
| 14. Dérivabilité .....                                | 22 |
| 15. Analyse de fonctions à la Maturita Blanche .....  | 24 |
| 16. Exercices d'analyse au Test Commun 1.....         | 27 |
| 17. Primitives .....                                  | 30 |
| 18. Primitives usuelles .....                         | 31 |
| 19. Intégrales.....                                   | 33 |
| 20. Calculs d'aires.....                              | 35 |
| 21. Calculs de volumes .....                          | 37 |
| 22. Valeur moyenne d'une fonction .....               | 41 |
| 23. Intégrales avec des exponentielles .....          | 43 |
| 24. Intégrales avec des logarithmes népériens .....   | 43 |
| 25. Intégration par parties .....                     | 44 |
| 26. Déterminer une primitive par intégration .....    | 46 |
| 27. Analyse - Maturitas écrites de 2015 et 2014.....  | 47 |
| 28. Inégalités des accroissements finis .....         | 55 |
| 29. Solutions détaillées .....                        | 58 |

## 1. Limites de polynômes en l'infini

### Propriété

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n \text{ est pair} \end{cases} & \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty. \\ \text{Si } \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \text{ est impair} \end{cases} & \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty. \end{array}$$

### Propriété

$$\text{Si } a_n \neq 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

### Preuve

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left( \frac{a_n x^n}{x^n} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x^1} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1}}{x^1} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n (a_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

Pour  $-\infty$ , la preuve est similaire.

c.q.f.d.

### Exercice 1

Calculer la limite.

- a)  $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x - 1$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$
- b)  $f(x) = 8x^4 + 12x^3 - 5x^2 + x$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$
- c)  $f(x) = 5x^3 + 100x^2 + 250x + 5$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$

### Solution de l'exercice 1

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

## 2. Limites de fonctions rationnelles en l'infini

### Propriété

Si  $\begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_m \neq 0 \end{cases}$  alors :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ .

### Preuve

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left( \frac{a_n x^n}{x^n} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left( \frac{b_m x^m}{x^m} + \frac{b_{m-1} x^{m-1}}{x^m} + \dots + \frac{b_1 x}{x^m} + \frac{b_0}{x^m} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left( b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1}}{x^1} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{x^n} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_{m-1}}{x^1} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_1}{x^{m-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_0}{x^m} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n (a_n)}{x^m (b_m)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Pour  $-\infty$ , la preuve est similaire.  
c.q.f.d.

### Exercice 1

Calculer la limite.

- $f(x) = \frac{7x-2}{3x-1}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$
- $f(x) = \frac{3x^2-5x}{6-2x}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$
- $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} - x$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$
- $f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{1+x}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$
- $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$

### Solution de l'exercice 1

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{7}{3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{7}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

### 3. Asymptotes

#### Exercice 1

Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes.

- a)  $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$
- b)  $f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2+1} + x$
- c)  $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{4-x}$
- d)  $f(x) = \frac{5x-11}{4-2x}$
- e)  $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x}$
- f)  $f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x}$

#### Solution de l'exercice 1

- a) La droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .  
La droite d'équation  $y = 4$  est asymptote horizontale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- b) Il n'y a pas d'asymptote verticale.  
La droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- c) La droite d'équation  $x = 4$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .  
La droite d'équation  $y = -x - 1$  est asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- d) La droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .  
La droite d'équation  $y = \frac{-5}{2}$  est asymptote horizontale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- e) La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .  
La droite d'équation  $y = \frac{x}{2} + 1$  est asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- f) La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .  
La droite d'équation  $y = 2x + 5$  est asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

## Exercice 2

Calculer la limite. Donner l'interprétation graphique de ce calcul.

- a)  $f(x) = \frac{7x-2}{3x-1}$  ; en  $\frac{1}{3}$   
b)  $f(x) = \frac{3x^2-5x}{6-2x}$  ; en 3  
c)  $f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{1+x}$  ; en  $-1$   
d)  $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}$  ; en 1 ; en 5

### Solution de l'exercice 2

- a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = +\infty.$   
 $x < \frac{1}{3}$                        $x > \frac{1}{3}$

La droite d'équation  $x = \frac{1}{3}$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

- b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty.$   
 $x < 3$                        $x > 3$

La droite d'équation  $x = 3$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

- c)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty.$   
 $x < -1$                        $x > -1$

La droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$   
 $x < 1$                        $x > 1$

La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty.$   
 $x < 5$                        $x > 5$

La droite d'équation  $x = 5$  est asymptote verticale à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

## 4. Limites d'autres fonctions en l'infini

### Propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

### Exercice 1

Calculer la limite.

- a)  $f(x) = \frac{x}{2} - 3\sqrt{x}$  ; en  $+\infty$
- b)  $f(x) = \frac{x-2\sqrt{x}}{3x-1}$  ; en  $+\infty$
- c)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-1}{x}}$  ; en  $+\infty$
- d)  $f(x) = \cos\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$  ; en  $+\infty$
- e)  $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$  ; en  $+\infty$

### Solution de l'exercice 1

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \cos 1$
- e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

### Exercice 2

Calculer la limite.

- a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$  ; en  $+\infty$
- b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$

### Solution de l'exercice 2

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

## 5. Théorème de comparaison

### Propriété : Théorème de comparaison

Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Soit  $L \in \mathbb{R}$ .

Si  $\begin{cases} g \geq f \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \end{cases}$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .

Si  $\begin{cases} g \leq f \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \end{cases}$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ .

Théorème des gendarmes :

Si  $\begin{cases} f \leq g \leq h \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \end{cases}$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

### Exercice 1

Étudier la limite de la fonction  $f$ .

- a)  $f(x) = 2x + \sin x$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$ .
- b)  $f(x) = x^3(2 + \cos x)$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$ .
- c)  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  ; en 0.
- d)  $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x+1}$  ; en  $+\infty$ .

### Solution de l'exercice 1

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

## 6. Dérivées

### Rappel:

$$(ku)' = k u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(k)' = 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{et } x \mapsto k \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$(x)' = 1 \quad \text{et } x \mapsto x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } ]0; +\infty[$$

$$(\sin x)' = \cos x \text{ et } x \mapsto \sin x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \text{ et } x \mapsto \cos x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

### Exercice 1

Calculer la fonction dérivée de la fonction  $f$  en précisant le domaine de validité de vos calculs.

a)  $f: x \mapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{2}$

b)  $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-x-6}$

c)  $f: x \mapsto (2x^2 - 3x + 4)^6$

d)  $f: x \mapsto \sqrt{3x+2}$

e)  $f: x \mapsto \frac{\sqrt{-2x}}{2x+1}$

### Solution de l'exercice 1

a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 3x - 2$$

b)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ .

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 6x - 9}{(x^2 - x - 6)^2}$$

c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 6(2x^2 - 3x + 4)^5(4x - 3)$$

d)  $f$  est dérivable sur  $\left] \frac{-2}{3}; +\infty \right[$ .

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

e)  $f$  est dérivable sur  $] -\infty; 0[ \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ .

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x-1}{\sqrt{-2x}} - 2\sqrt{-2x}}{(2x+1)^2}$$

## Exercice 2

Calculer la fonction dérivée de la fonction  $f$  en précisant le domaine de validité de vos calculs.

a)  $f: x \mapsto \frac{-5x^3+2x-3}{4}$

b)  $f: x \mapsto \frac{-3x+4}{x^2-7x+10}$

c)  $f: x \mapsto (-2x^2 + x - 7)^{15}$

d)  $f: x \mapsto \sqrt{-2x+1}$

e)  $f: x \mapsto \frac{\sqrt{3x}}{-5x+2}$

### Solution de l'exercice 2

a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-15}{4}x^2 + \frac{1}{2}$$

b)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x - 2}{(x^2 - 7x + 10)^2}$$

c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 15(-2x^2 + x - 7)^{14}(-4x + 1)$$

d)  $f$  est dérivable sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-2x+1}}$$

e)  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[ \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{3(-5x+2)}{2\sqrt{3x}} + 5(\sqrt{3x})}{(-5x+2)^2}$$

## Exercice 3

Trouver la fonction dérivée de la fonction  $f$  proposée sur l'intervalle  $I$  donné.

a)  $f: x \mapsto 2 \sin x \cos^2 x$   $I = \mathbb{R}$

b)  $f: x \mapsto \tan^2 x$   $I = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $f: x \mapsto \cos^2 \left( 4x - \frac{\pi}{3} \right)$   $I = \mathbb{R}$

### Solution de l'exercice 3

a)  $f'(x) = 2(\cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x)$

b)  $f'(x) = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

c)  $f'(x) = -8 \cos \left( 4x - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left( 4x - \frac{\pi}{3} \right)$

## 7. Dérivées – Logarithme et exponentielle

**Rappel:**

$$(e^x)' = e^x \quad \text{et} \quad x \mapsto e^x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur } ]0; +\infty[$$

### Exercice 1

Calculer la fonction dérivée de la fonction  $f$  proposée sur l'ensemble  $E$  donné.

1.  $f(x) = \ln x^2$   $E = \mathbb{R}^*$
2.  $f(x) = (\ln x)^2$   $E = ]0; +\infty[$
3.  $f(x) = x \ln x - x$   $E = ]0; +\infty[$
4.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$   $E = ]0; +\infty[$
5.  $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$   $E = ]1; +\infty[$
6.  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$   $E = ]0; +\infty[$

### Solution de l'exercice 1

1.  $f'(x) = \frac{2}{x}$
2.  $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$
3.  $f'(x) = \ln x$
4.  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
5.  $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$
6.  $f'(x) = \frac{2 \ln x - x - 1}{x^3}$

## Exercice 2

Calculer la fonction dérivée de la fonction  $f$  proposée sur l'ensemble  $E$  donné.

1.  $f(x) = x^2 e^x$   $E = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$   $E = \mathbb{R}$
3.  $f(x) = 2e^x - xe^2$   $E = \mathbb{R}$
4.  $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$   $E = \mathbb{R}^*$
5.  $f(x) = e^{x \ln x}$   $E = ]0; +\infty[$
6.  $f(x) = e^x \ln x$   $E = ]0; +\infty[$
7.  $f(x) = x e^{x^2+x}$   $E = \mathbb{R}$
8.  $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right) e^{x-1}$   $E = \mathbb{R}^*$
9.  $f(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$   $E = \mathbb{R}$
10.  $f(x) = \ln(1 + e^x)$   $E = \mathbb{R}$
11.  $f(x) = e^{\cos x}$   $E = \mathbb{R}$

## Solution de l'exercice 2

1.  $f'(x) = x e^x (x + 2)$
2.  $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
3.  $f'(x) = 2e^x - e^2$
4.  $f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$
5.  $f'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$
6.  $f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$
7.  $f'(x) = e^{x^2+x} (2x^2 + x + 1)$
8.  $f'(x) = \frac{e^{x-1}}{x^2} (x^2 + x - 1)$
9.  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
10.  $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
11.  $f'(x) = -e^{\cos x} \sin x$

## 8. Tangentes

### Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$  pour tout réel  $x \neq 1$ .

- a) Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x \neq 1$ .
- b) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $(t)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse  $-2$ .
- c) Déterminer les coordonnées du point de tangence  $A$  de  $(t)$  avec  $(\mathcal{C}_f)$ .
- d) Soit la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 3$ .  
Donner le coefficient directeur de la droite  $(d)$ .
- e) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $(s)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  telle que cette tangente soit parallèle à la droite  $(d)$ .

### Solution de l'exercice 1

a)

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

b)

$$(t): y = \frac{20}{27}x + \frac{16}{27}$$

c)

$$A\left(-2; \frac{-8}{9}\right)$$

d)

Le coefficient directeur de la droite  $(d)$  est égal à 1.

e)

$$(s): y = x - \frac{1}{4}$$

## Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$  pour tout réel  $x \neq -1$ .

- Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x \neq -1$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente  $(t)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse 3.
- Déterminer les coordonnées du point de tangence  $A$  de  $(t)$  avec  $(\mathcal{C}_f)$ .
- Soit la droite  $(d)$  d'équation  $y = -4x - 1$ .  
Donner le coefficient directeur de la droite  $(d)$ .
- Déterminer les équations réduites des tangentes  $(r)$  et  $(s)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  telle que :  
ces tangentes soient parallèles à la droite  $(d)$  et  
 $(r)$  est au-dessus de  $(s)$ .

## Solution de l'exercice 2

a)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2}$$

b)

$$(t): y = \frac{11}{16}x - \frac{29}{16}$$

c)

$$A \left( \frac{3}{4} \right)$$

d)

Le coefficient directeur de la droite  $(d)$  est égal à  $-4$ .

e)

$$f'(x) = -4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

$$(r): y = -4x + 1$$

$$(s): y = -4x - 19$$

## 9. Limites avec la fonction logarithme népérien

### Propriété

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ (prouvable à l'aide de la dérivée)}$$

### Exercice 1

Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $a$ .

a)  $f(x) = 4 \ln x^3$  ;  $a = +\infty$ .

b)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ;  $a = 0$ .

c)  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$  ;  $a = 0$ .

d)  $f(x) = x - \ln x$  ;  $a = +\infty$ .

e)  $f(x) = x^3 \ln x$  ;  $a = 0$ .

f)  $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$  ;  $a = +\infty$ .

g)  $f(x) = \frac{\ln(-4x+1)}{x}$  ;  $a = 0$ .

### Solution de l'exercice 1

a)  $+\infty$

b)  $-\infty$

c)  $+\infty$

d)  $+\infty$

e)  $0$

f)  $0$

g)  $-4$

## Exercice 2

Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $a$ .

a)  $f(x) = -3 \ln(x^2 + 1)$  ;  $a = +\infty$ .

b)  $f(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$  ;  $a = 0$ .

c)  $f(x) = \frac{3x+2 \ln x}{x}$  ;  $a = 0$ .

d)  $f(x) = -3x + 2 \ln x$  ;  $a = +\infty$ .

e)  $f(x) = x^5 \ln x$  ;  $a = 0$ .

f)  $f(x) = \frac{\ln x}{x^5}$  ;  $a = +\infty$ .

g)  $f(x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{(x-2)^2} + 1\right)}{\frac{1}{(x-2)^2}}$  ;  $a = 2$ .

h)  $f(x) = \frac{\ln(3x+1)}{x}$  ;  $a = 0$ .

## Solution de l'exercice 2

a)  $-\infty$

b)  $+\infty$

c)  $-\infty$

d)  $-\infty$

e)  $0$

f)  $0$

g)  $0$

h)  $3$

## 10.Limites avec la fonction exponentielle

### Propriété

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ (prouvable à l'aide de la dérivée)}$$

### Exercice 1

Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $a$ .

- a)  $f(x) = e^x - e^{-x}$  ;  $a = +\infty$ .
- b)  $f(x) = e^{2x} - 3e^x$  ;  $a = +\infty$ .
- c)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  ;  $a = +\infty$ .
- d)  $f(x) = 2xe^{-x}$  ;  $a = +\infty$ .
- e)  $f(x) = (x + 1)e^x$  ;  $a = -\infty$ .

f)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$  ;  $a = 0$ .

g)  $f(x) = x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$  ;  $a = +\infty$ .

### Solution de l'exercice 1

- a)  $+\infty$
- b)  $+\infty$
- c) 1
- d) 0
- e) 0

- f)  $\frac{1}{2}$
- g) 1

## Exercice 2

Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $a$ .

a)  $f(x) = (e^{-x})^2 + \frac{1}{e^x}; a = +\infty.$

b)  $f(x) = e^{2x} - 2e^{5x}; a = +\infty.$

c)  $f(x) = \frac{3e^x - 2}{4e^x + 1}; a = +\infty.$

d)  $f(x) = xe^{-x}; a = +\infty.$

e)  $f(x) = (x - 5)e^x; a = -\infty.$

f)  $f(x) = 3 \frac{e^x - 1}{x}; a = 0.$

g)  $f(x) = \frac{\frac{1}{e^{x-3}} - 1}{\frac{1}{x-3}}; a = -\infty.$

## Solution de l'exercice 2

a) 0

b)  $-\infty$

c)  $\frac{3}{4}$

d) 0

e) 0

f) 3

g) 1

## 11.Limites avec des fonctions puissances

### Propriété et définition

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

❖ Si  $\alpha < 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$

❖ Si  $\alpha < 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$

❖ Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$

Remarque : On a déjà  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$ .

On définit  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}, 0^\alpha = 0$ .

On a donc  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, 0^\alpha = 0$ .

Ceci est cohérent avec la limite ci-dessus.

❖ Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

❖ Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

❖ Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

❖ Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^\alpha = 0$

❖ Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

### Exercice 1

Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $a$ .

a)  $f(x) = \frac{\ln x}{x^\pi}; a = +\infty$ .

b)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[2]{x}}; a = +\infty$ .

c)  $f(x) = \frac{e^x}{x^{2020}}; a = +\infty$ .

d)  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}; a = +\infty$ .

e)  $f(x) = \frac{x^{2000000000}}{e^x}; a = +\infty$ .

f)  $f(x) = \frac{\sqrt[50]{x^7}}{e^x}; a = +\infty$ .

g)  $f(x) = x^e \ln x; a = 0$ .

h)  $f(x) = \sqrt[5000]{x^3} \ln x; a = 0$ .

### Solution de l'exercice 1

a) 0

b) 0

c)  $+\infty$

d)  $+\infty$

e) 0

f) 0

g) 0

h) 0

## 12. Calculer une limite à l'aide de la dérivée

### Propriété

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### Exercice 1

Étudier la limite de la fonction  $g$  en  $a$ .

- a)  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  ;  $a = 0$ .
- b)  $g(x) = \frac{\sin 3x}{x}$  ;  $a = 0$ .
- c)  $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  ;  $a = 0$ .
- d)  $g(x) = \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$  ;  $a = 0$ .
- e)  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  ;  $a = +\infty$ .
- f)  $g(x) = \frac{\tan x}{x}$  ;  $a = 0$ .
- g)  $g(x) = \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$  ;  $a = \frac{\pi}{6}$ .
- h)  $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$  ;  $a = 0$ .
- i)  $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  ;  $a = 0$ .

### Solution de l'exercice 1

- a) 1
- b) 3
- c) 0
- d)  $\frac{5}{3}$
- e)  $+\infty$
- f) 1
- g)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- h) 1
- i) 1

### 13. Prolongement par continuité

#### Exercice 1

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

Indication :  $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0}$

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ .

En vous aidant de la question 1, montrer que  $f$  est continue en 0.

#### Solution de l'exercice 1

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = f'(0) \text{ avec } f(x) = \ln(1+x)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ,  $f$  est continue en 0.

#### Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-1; +\infty[ - \{0\}$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ .

Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 0.

#### Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On peut donc prolonger  $f$  par continuité en définissant  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 3

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  par  $g(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ .

1. En notant que  $-1$  est une racine de  $x^3 + 1$ , simplifier  $g(x)$ .
2. Déterminer la limite de  $g$  en  $-1$ .
3. Peut-on prolonger  $g$  par continuité sur  $\mathbb{R}$  ?

#### Solution de l'exercice 3

1.

$$\begin{aligned}x^3 + 1 &= (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\&= ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c\end{aligned}$$

$$c = 1$$

$$b + c = 0$$

$$b = -1$$

$$a + b = 0$$

$$a = 1$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$g(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = x^2 - x + 1 \text{ pour tout } x \neq -1$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

3.

On peut donc prolonger  $g$  par continuité en définissant  $g(-1) = 3$ .

## 14.Dérivabilité

### Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = 2 + 3x - 4x^2 \ln x & \text{sur } ]0; +\infty[ \\ f(0) = k \end{cases}$ .

Pour quelles valeurs de  $k$ , la fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ?

### Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 3x - 4x^2 \ln x - k}{x}$$

$$\text{Si } k = 2 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 3x - 4x^2 \ln x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 4x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3 - 4x \ln x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 - 4x \ln x = 3$$

$$f'(0) = 3$$

$f$  est dérivable en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - k}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{-4x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - k}{x} + 3 - 4x \ln x$$

$$\text{Si } k > 2 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - k}{x} + 3 - 4x \ln x = -\infty \text{ car } 2 - k < 0$$

$f'(0)$  n'existe pas

$f$  n'est pas dérivable en 0.

$$\text{Si } k < 2 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - k}{x} + 3 - 4x \ln x = +\infty \text{ car } 2 - k > 0$$

$f'(0)$  n'existe pas

$f$  n'est pas dérivable en 0.

## Exercice 2 (facultatif)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = 2 + 3x - 4x^2 \ln x & \text{sur } ]0; +\infty[ \\ f(x) = 4x^2 + 3x + 2 & \text{sur } ]-\infty; 0] \end{cases}.$$

Calculer le nombre dérivé  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### Solution

Sur  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = (2 + 3x - 4x^2 \ln x)' = 3 - 4 \left( 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \right) = 3 - 8x \ln x - 4x$

En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + 3x - 4x^2 \ln x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 4x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(3 - 4x \ln x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - 4x \ln x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 + 3x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(4x + 3)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4x + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$$

$$f'(0) = 3$$

Sur  $]-\infty; 0[$  :  $f'(x) = (4x^2 + 3x + 2)' = 8x + 3$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x + 3 & \text{si } x \in ]-\infty; 0[ \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ 3 - 8x \ln x - 4x & \text{si } x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x + 3 & \text{si } x \in ]-\infty; 0] \\ 3 - 8x \ln x - 4x & \text{si } x \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

## 15. Analyse de fonctions à la Maturita Blanche

### Exercice 1 : Maturita blanche 2019

Le but du problème est l'étude de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x}.$$

On note  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

On choisit 5 cm pour l'unité graphique.

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par:  $g(x) = e^x(x - 2) - 1$ .

1) Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .

2) Déterminer la fonction dérivée  $g'$  de la fonction  $g$ .

En déduire le tableau de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

3) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[2; 3]$ .

Remarque : Cette phrase ci-dessus est ambiguë. Pour lever cette ambiguïté, remplaçons cette phrase ci-dessus par « Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[0, +\infty[$  et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[2; 3]$ . ».

Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

4) En déduire le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

#### PARTIE B - Étude de la fonction $f$

1) Démontrer que pour tout nombre réel  $x \in [0, +\infty[$ , on a:  $f(x) = \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$ .

2) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Interpréter graphiquement cette limite.

3) Étudier la position relative de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et de la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 1$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

4) Démontrer que la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  est définie par :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + x)^2}.$$

5) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

6) On admet que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ . Déterminer une valeur approchée de  $f(\alpha)$  à  $10^{-2}$  près.

7) Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\mathcal{D})$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

## Exercice 2 : Maturita blanche 2015

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$ .

1°) Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2°) a) Calculer  $g'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $g$ .

b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

Justifier l'encadrement de  $\alpha$  :  $0,6 < \alpha < 0,7$ .

c) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### Partie B

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \left[ x + (1 - x)e^{2x} \right]$ .

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1°) a) Vérifier que  $f(x) = \frac{x}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{x} - 1 \right) e^{2x} \right]$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2°) a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

b) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(D)$ .

3°) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{1}{2} g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et le tableau de variations de  $f$ .

4°) Tracer la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$ .

### Exercice 3 : Maturita blanche 2013

#### Partie A

Dans cette première partie on étudie le signe de la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x.$$

1. Démontrer que  $g'(x) = -\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$ . Étudier le sens de variation de  $g(x)$ .
2. a) Calculer  $g(1)$  et  $g(2)$ . Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .  
b) Trouver un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .
3. Dédurre le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

#### Partie B

L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}.$$

On appelle  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Étudier les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ces limites.
2. a) Montrer que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \cdot g(x)$   
b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. Écrire une équation de la tangente  $(t)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 1.
4. Tracer  $(t)$  et  $(C_f)$ .

## 16.Exercices d'analyse au Test Commun 1

### Exercice 1 : TC1 – 5/6 - 2019

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

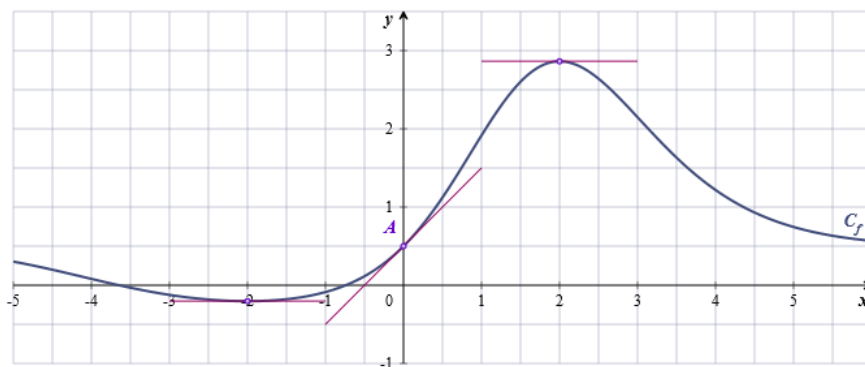
Une bonne réponse rapporte 0,5 point; une mauvaise réponse donne 0 point; l'absence de réponse donne 0 point.

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative ( $C_f$ ) dans un repère orthonormal.

On dispose des renseignements suivants sur la fonction  $f$  et la courbe ( $C_f$ ) :

- la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$ , elle est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-\infty ; -2]$  et sur l'intervalle  $[2 ; +\infty[$  ;
- la droite d'équation  $y = 0,5$  est asymptote à la courbe ( $C_f$ ) en  $-\infty$  et en  $+\infty$  ;
- la tangente en  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  à la courbe ( $C_f$ ) passe par le point de coordonnées  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .



1) Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 0,4$  admet :

- une solution
- deux solutions
- trois solutions

2) On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f'$  est :

- croissante sur  $[0 ; 2]$
- positive sur  $[-2 ; 2]$
- positive sur  $[0 ; +\infty[$

3) La tangente en A à la courbe ( $C_f$ ) a pour équation :

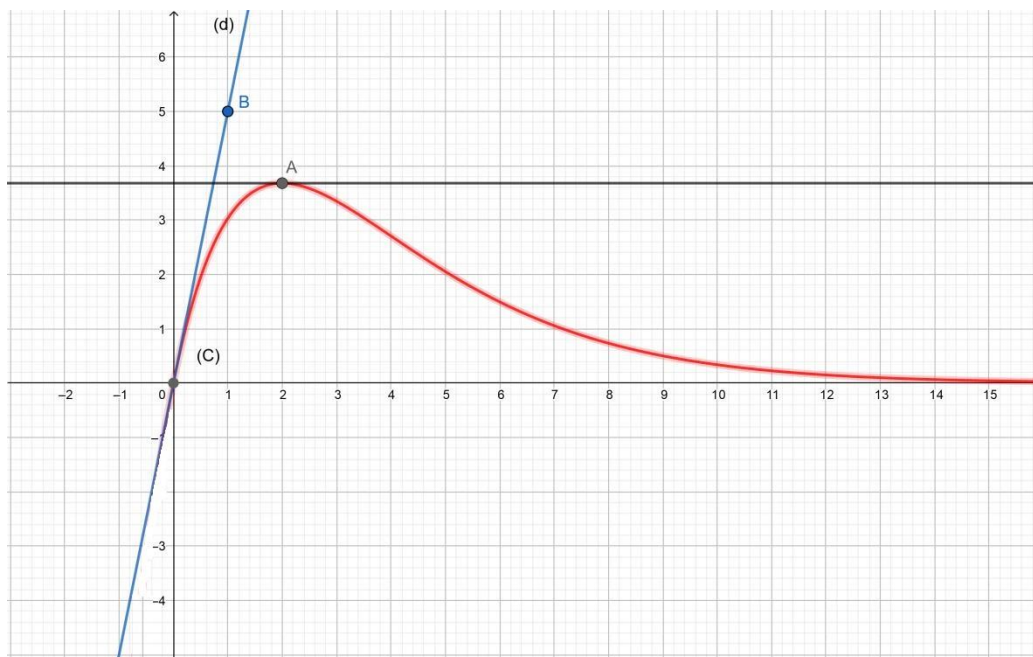
- $y = 0,5x + 1$
- $y = x + 0,5$
- $y = 1,5x + 0,5$

4) On note  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(f(x))$  :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\ln 2$

## Exercice 2 : TC1 – 5/6 - 2018

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative  $(C)$  d'une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$ .



On précise que :

- l'origine  $O$  du repère appartient à  $(C)$
  - la droite passant par  $O$  et par le point  $B$  de coordonnées  $(1; 5)$  est tangente en  $O$  à  $(C)$ .
  - la tangente au point  $A$  d'abscisse 2 à  $(C)$  est parallèle à l'axe des abscisses
  - l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $(C)$ .
1. En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :
    - a) Préciser  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , et  $f'(2)$ .
    - b) Donner la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
    - c) Préciser le sens de variation de  $f$ ; dresser son tableau de variation.
  2. On étudie la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = (ax + b)e^{cx}$  où  $a, b, c$  sont trois réels, et telle que  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 5$  et  $g'(2) = 0$ .
    - a) En utilisant  $g(0)$ , calculer  $b$ .
    - b) Calculer  $g'(x)$ .
    - c) En utilisant  $g'(0)$ , et  $g'(2)$ , calculer  $a$  et  $c$ . En déduire que  $g(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$ .
  3. Calculer alors une valeur décimale approchée à  $10^{-1}$  près de  $g(2)$ ,  $g(4)$ ,  $g(5)$ , et  $g(8)$ .  
Peut-on dire que  $g$  est une bonne approximation de la fonction  $f$  étudiée dans la question 1. ?

### Exercice 3 : TC1 – 5/6 - 2017

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - 3x + 2}$  ; on note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Trouver les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que pour tout  $x \in D_f$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 3x + 2}.$$

- 3) Dédire de la question précédente, l'existence d'une asymptote  $\Delta$  à  $(C_f)$  et donner une équation de celle-ci.
- 4) Étudier la position relative de  $\Delta$  et  $(C_f)$ .

## 17.Primitives

Dans ce paragraphe :

- $I$  est un intervalle réel qui n'est pas l'intervalle nul ou un intervalle contenant uniquement un élément ;
- $f$  est une fonction définie sur l'intervalle  $I$ .

### Définition

$F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$   
ssi

$F$  est une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$  et  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $I$ .

### Propriété

Toute fonction continue sur  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

### Propriété

Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors :

$G$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$   
ssi

$G = F + C$  où  $C \in \mathbb{R}$  et  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$ .

Preuve

$\Leftarrow$

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

$\Rightarrow$

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$G - F$  est une fonction constante sur  $I$

$$G - F = C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$G = F + C$$

c.q.f.d.

### Propriété

Si  $f$  est continue sur  $I$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ , alors :

Il existe une et une seule primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

Preuve

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Si  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$  alors  $G(x_0) = F(x_0) + y_0 - F(x_0) = y_0$ .

Donc il existe une primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

Supposons qu'il existe une autre primitive  $H$  de  $f$  sur  $I$  tel que  $H(x_0) = y_0$ .

$$H(x) = F(x) + C$$

$$H(x) = G(x) - y_0 + F(x_0) + C$$

$$H(x_0) = y_0$$

$$G(x_0) - y_0 + F(x_0) + C = y_0$$

$$C = y_0 - F(x_0)$$

$$H(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

$$H(x) = G(x)$$

c.q.f.d.

## 18.Primitives usuelles

### Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction continue  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

- a)  $f(x) = x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 10$   $I = \mathbb{R}$
- b)  $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$   $I = ]0; +\infty[$
- c)  $f(x) = (3x + 2)^7$   $I = \mathbb{R}$
- d)  $f(x) = 18x(3x^2 - 2)^4$   $I = \mathbb{R}$
- e)  $f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{4}\right)(x^4 + x)^5$   $I = \mathbb{R}$
- f)  $f(x) = \frac{4x-6}{(x^2-3x+2)^2}$   $I = ]2; +\infty[$

### Solution de l'exercice 1

- a)  $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{7}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 10x$
- b)  $F(x) = \frac{-3}{x} + 2\sqrt{x}$
- c)  $F(x) = \frac{1}{24}(3x + 2)^8$
- d)  $F(x) = \frac{3}{5}(3x^2 - 2)^5$
- e)  $F(x) = \frac{1}{24}(x^4 + x)^6$
- f)  $F(x) = 2 \frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-2}{u} = \frac{-2}{x^2-3x+2}$

### Exercice 2

Déterminer une primitive de la fonction continue  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

- a)  $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 5$   $I = \mathbb{R}$
- b)  $f(x) = \frac{-2}{x^4} + \frac{10}{\sqrt[3]{x}}$   $I = ]0; +\infty[$
- c)  $f(x) = (-2x + 5)^3$   $I = \mathbb{R}$
- d)  $f(x) = -12x^2(2x^3 - 3)^4$   $I = \mathbb{R}$
- e)  $f(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)(x^3 + x^2)^9$   $I = \mathbb{R}$
- f)  $f(x) = \frac{-20x+50}{(-x^2+5x-6)^5}$   $I = ]3; +\infty[$

### Solution de l'exercice 2

- a)  $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x$
- b)  $F(x) = \frac{2}{3x^3} + 15\sqrt[3]{x^2}$
- c)  $F(x) = \frac{-1}{8}(-2x + 5)^4$
- d)  $F(x) = \frac{-2}{5}(2x^3 - 3)^5$
- e)  $F(x) = \frac{1}{20}(x^3 + x^2)^{10}$
- f)  $F(x) = \frac{-5}{2(-x^2+5x-6)^4}$

### Exercice 3

Déterminer la primitive  $F$  de la fonction continue  $f$  sur un intervalle  $I$  à préciser qui vérifie la condition donnée.

- a)  $f(x) = \frac{2}{x^2}$  et  $F(1) = 0$   
b)  $f(x) = 3x^2(x^3 + 6)$  et  $F(-1) = 3$

#### Solution détaillée de l'exercice 3

- a)  $I = ]0; +\infty[$   
$$F(x) = \frac{-2}{x} + 2$$
  
b)  $I = \mathbb{R}$   
$$F(x) = \frac{(x^3 + 6)^2}{2} - \frac{19}{2}$$

### Exercice 4

Déterminer la primitive  $F$  de la fonction continue  $f$  sur un intervalle  $I$  à préciser qui vérifie la condition donnée.

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  et  $F(-2) = 3$   
b)  $f(x) = 6x^2 - 6x + 3$  et  $F(2) = 0$

#### Solution de l'exercice 4

- a)  $I = ]-\infty; 0[$   
$$F(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{25}{8}$$
  
b)  $I = \mathbb{R}$   
$$F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$$

## 19. Intégrales

Dans ce paragraphe :

- $I$  est un intervalle réel qui n'est pas l'intervalle nul ou un intervalle contenant uniquement un élément ;
- $f$  et  $g$  sont des fonctions continues sur l'intervalle  $I$  ;
- $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  ;
- $G$  est une primitive de  $g$  sur  $I$  ;
- $a \in I, b \in I, c \in I$ .

### Propriété

Si  $H$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors :  $H(b) - H(a) = F(b) - F(a)$ .

Preuve

$H(x) = F(x) + C$  pour un certain réel  $C$

$$H(b) - H(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

c.q.f.d.

### Définition

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

On dit que  $\int_a^b f(x) dx$  est l'intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$ .

On note  $F(b) - F(a)$  sous la forme condensée  $[F(x)]_a^b$ .

### Propriétés

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad ; \text{ c'est la relation de Chasles}$$

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } \begin{cases} a \leq b \\ f \geq 0 \text{ sur } [a; b] \end{cases} \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{si } \begin{cases} a \leq b \\ f \leq 0 \text{ sur } [a; b] \end{cases} \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

$$\text{si } \begin{cases} a \leq b \\ f \leq g \text{ sur } [a; b] \end{cases} \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Preuve

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(-F(a) + F(b)) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx$$

$$((F + G)(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

D'où  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))$$

$$= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$((\alpha F)(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$$

D'où  $\alpha F$  est une primitive de  $\alpha f$  sur  $I$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a) = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha(F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Supposons que  $\begin{cases} a \leq b \\ f \geq 0 \text{ sur } [a; b] \end{cases}$ .

$$F'(x) = f(x) \geq 0$$

$F$  est croissante sur  $[a; b]$

$$F(a) \leq F(b)$$

$$F(b) - F(a) \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Supposons que  $\begin{cases} a \leq b \\ f \leq 0 \text{ sur } [a; b] \end{cases}$ .

$$-f \geq 0 \text{ sur } [a; b]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b -(-f(x)) dx = -\int_a^b -f(x) dx \leq 0$$

Supposons que  $\begin{cases} a \leq b \\ f \leq g \text{ sur } [a; b] \end{cases}$ .

$$g - f \geq 0 \text{ sur } [a; b]$$

$$0 \leq \int_a^b (g - f)(x) dx = \int_a^b (g + (-1)f)(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b (-1)f(x) dx$$

$$= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

c.q.f.d.

## 20. Calculs d'aires

### Définition

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f \geq 0$  sur  $I$ .

Soit  $a \leq b$ .

Alors, l'aire du domaine  $(\mathcal{D})$  délimité par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ , est :

$$\int_a^b f(x) dx \quad .$$

### Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 3x$ .

- Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal d'unités  $2 \text{ cm}$ .
- Soit  $(S_1)$  le domaine délimité par la droite d'équation  $x = -1$ , l'axe des abscisses et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . Hachurer ce domaine et déterminer son aire  $\mathcal{A}_1$  en  $\text{cm}^2$ .  
Soit  $(S_2)$  le domaine délimité par la droite d'équation  $x = 4$ , l'axe des abscisses et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . Hachurer ce domaine et déterminer son aire  $\mathcal{A}_2$  en  $\text{cm}^2$ .  
Soit  $(S_3)$  le domaine délimité par les droites d'équations  $x = 0,5$  et  $x = 2,5$ , l'axe des abscisses et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . Hachurer ce domaine et déterminer son aire  $\mathcal{A}_3$  en  $\text{cm}^2$ .

### Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A}_1 &= \frac{11}{6} = \frac{11}{6} u. a. = \frac{22}{3} \text{ cm}^2 \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{11}{6} = \frac{11}{6} u. a. = \frac{22}{3} \text{ cm}^2 \\ \mathcal{A}_3 &= \frac{23}{6} = \frac{23}{6} u. a. = \frac{46}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ .

- Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal d'unités  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ .
- Soit  $(S_1)$  le domaine délimité par les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 3$ , l'axe des abscisses et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . Hachurer ce domaine et déterminer son aire  $\mathcal{A}_1$  en  $\text{cm}^2$ .  
Soit  $(S_2)$  le domaine délimité par la droite d'équation  $x = 7$ , l'axe des abscisses et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . Hachurer ce domaine et déterminer son aire  $\mathcal{A}_2$  en  $\text{cm}^2$ .

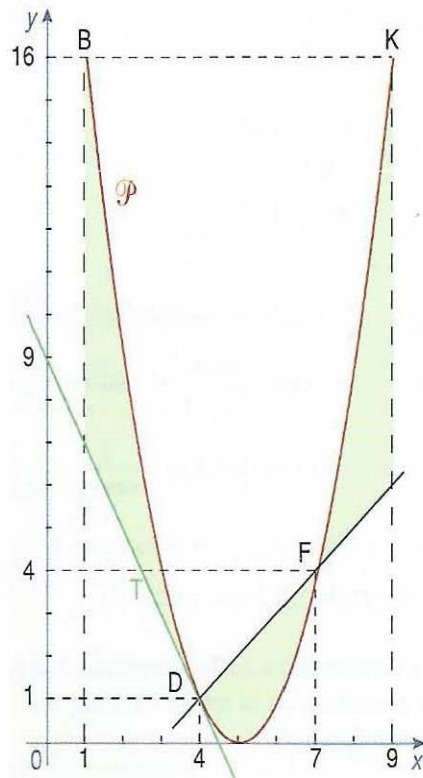
### Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A}_1 &= \frac{11}{3} = \frac{11}{3} u. a. = \frac{11}{12} \text{ cm}^2 \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{32}{3} = \frac{32}{3} u. a. = \frac{8}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### Exercice 3

Page 116 du livre "MATH Term 5 Obligatoire,  
NOUVEAU TRANSMATH, NATHAN, 1994"

53 La courbe passant par les points B, D, F et K est une portion de la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2 - 10x + 25$ .



1. Écrivez une équation de la tangente T à  $\mathcal{P}$  au point D de coordonnées (4 ; 1).
2. Donnez une équation de la droite (FD).
3. Calculez, en unités d'aire, l'aire du domaine en vert sur la figure.

### Solution de l'exercice 3

1.

$$T: y = -2x + 9$$

2.

$$(FD): y = x - 3$$

3.

$$\text{L'aire du domaine en vert} = \frac{133}{6} = \frac{133}{6} \text{ u. a.}$$

## 21. Calculs de volumes

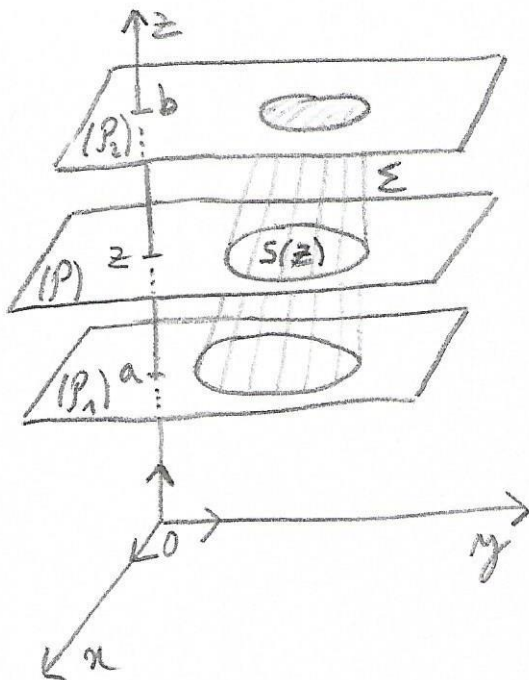
### Propriété

Soient :

- $I$  un intervalle réel
- $a$  et  $b$  deux réels de  $I$
- $S$  une fonction continue sur  $I$
- $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$  deux plans d'équations respectives  $z = a$  et  $z = b$  dans un repère orthonormal
- $\Sigma$  un solide délimité par  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$
- $S(z)$  l'aire de la section de ce solide par le plan  $(\mathcal{P})$ , parallèle à  $(\mathcal{P}_1)$  et à  $(\mathcal{P}_2)$ , de cote  $z$  ( $a \leq z \leq b$ )
- $\mathcal{V}$  le volume de ce solide.

Alors :

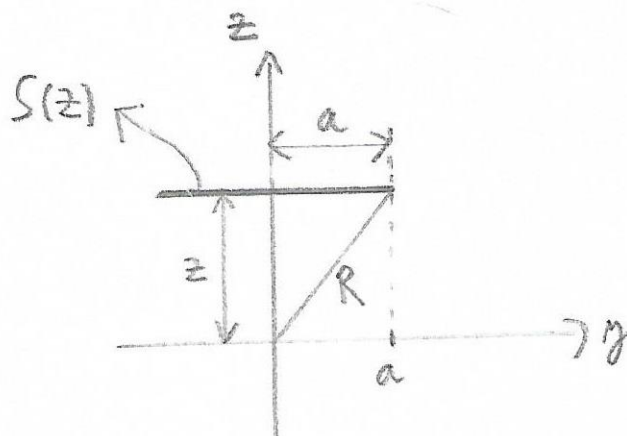
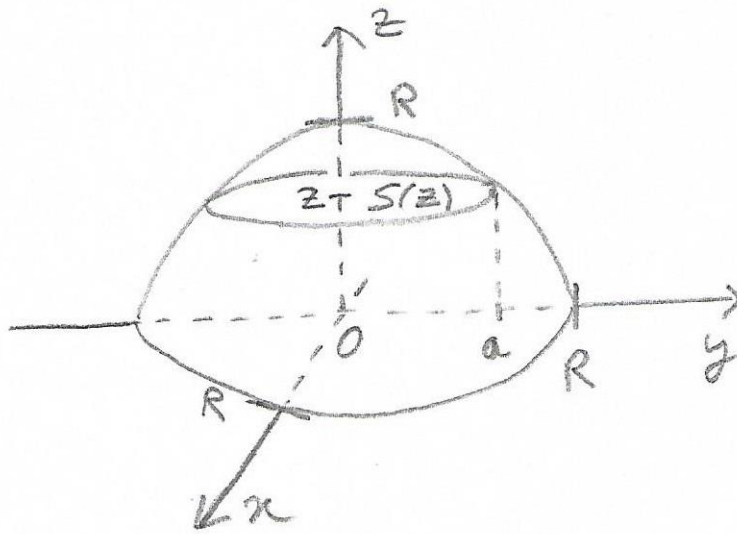
$$\mathcal{V} = \int_a^b S(z) dz .$$



### Exercice 1 (facultatif)

Déterminer le volume d'une boule de rayon  $R$ .

#### Résolution



$$\begin{aligned} z^2 + a^2 &= R^2 \\ a &= \sqrt{R^2 - z^2} \\ S(z) &= \pi a^2 \\ S(z) &= \pi (R^2 - z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^R S(z) dz = 2 \int_0^R \pi (R^2 - z^2) dz = 2 \left[ \pi \left( R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \right]_0^R = 2 \left[ \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - 0 \right] \\ V &= \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

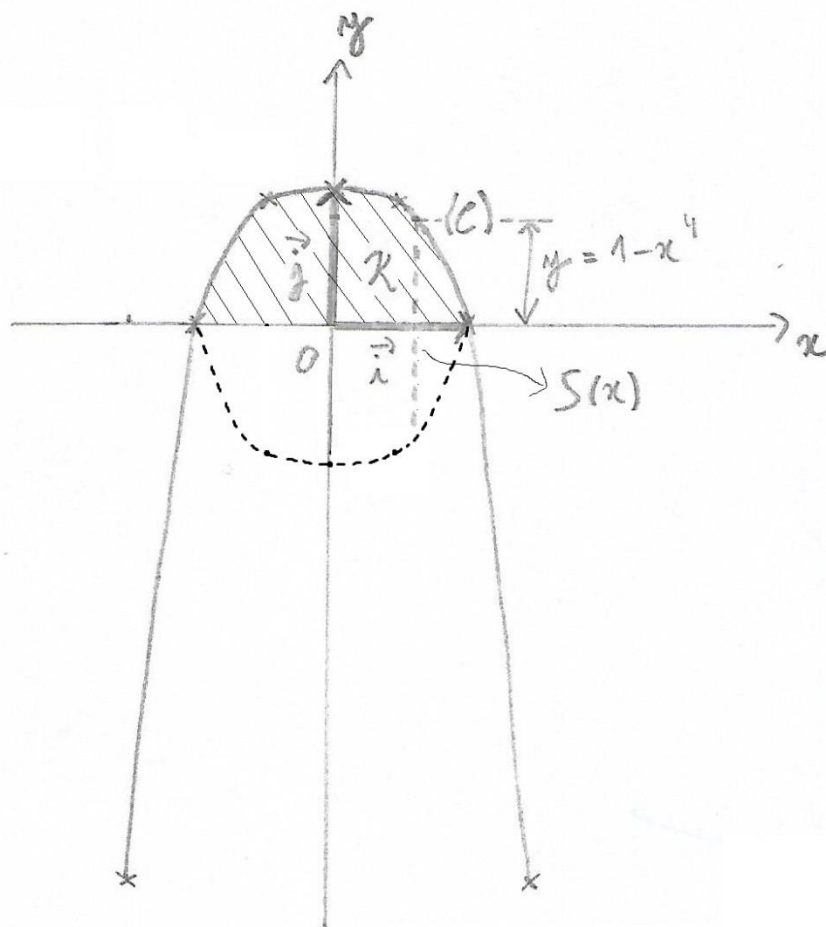
## Exercice 2

1. Représenter graphiquement la courbe  $(C)$  d'équation  $y = 1 - x^4$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'unité  $2 \text{ cm}$ .
2. On appelle  $\mathcal{K}$  la surface limitée par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = 1$ . On désigne par  $\mathcal{V}$  le volume obtenu par rotation de  $\mathcal{K}$  autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume  $\mathcal{V}$  et l'exprimer en  $\text{cm}^3$ .

### Résolution

①  $y = 1 - x^4$   
 $f(x) = 1 - x^4$   
 $f'(x) = -4x^3$

|                  |           |     |           |
|------------------|-----------|-----|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| Signe de $f'(x)$ |           | $+$ | $-$       |
| $f(x)$           | $-\infty$ | $1$ | $-\infty$ |



2.

$$S(x) = \pi y^2 = \pi(1 - x^4)^2 = \pi(1 - 2x^4 + x^8) = \pi - 2\pi x^4 + \pi x^8$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 S(x) dx = \left[ \pi x - 2\pi \frac{x^5}{5} + \pi \frac{x^9}{9} \right]_{-1}^1 \\ &= \left( \pi 1 - 2\pi \frac{1^5}{5} + \pi \frac{1^9}{9} \right) - \left( \pi(-1) - 2\pi \frac{(-1)^5}{5} + \pi \frac{(-1)^9}{9} \right) \\ &= \pi - \frac{2}{5}\pi + \frac{1}{9}\pi + \pi - \frac{2}{5}\pi + \frac{1}{9}\pi \\ &= 2\pi - \frac{4}{5}\pi + \frac{2}{9}\pi \\ &= \frac{90}{45}\pi - \frac{36}{45}\pi + \frac{10}{45}\pi \\ &= \frac{64}{45}\pi \\ &= \frac{64}{45}\pi (2 \text{ cm})^3 \\ &= \frac{512}{45}\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

### Exercice 3 (facultatif)

1. Représenter graphiquement la courbe  $(\mathcal{C})$  d'équation  $y = 4 - x^2$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'unité  $2 \text{ cm}$ .
2. On appelle  $\mathcal{K}$  la surface limitée par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = -2$  et  $x = 2$ . On désigne par  $\mathcal{V}$  le volume obtenu par rotation de  $\mathcal{K}$  autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume  $\mathcal{V}$  et l'exprimer en  $\text{cm}^3$ .

### Solution

$$\begin{aligned} S(x) &= \dots = \pi(4 - x^2)^2 \\ \mathcal{V} &= \int_{-2}^2 S(x) dx = \dots = \frac{512}{15}\pi = \frac{4096}{15}\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

## 22. Valeur moyenne d'une fonction

### Définition

Soient :

- $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$
- $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Alors :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$  est la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$  .

### Interprétation graphique :

Pour une fonction positive sur  $[a; b]$ , la valeur moyenne de  $f$  est la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à l'aire du domaine limité par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

En effet, on a  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$  et donc  $\int_a^b f(t)dt = m(b-a)$  .

### Inégalité de la moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  (contenant au moins deux nombres).

Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  tels que  $a \leq b$ .

Soient  $m$  et  $M$  deux réels.

Si pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ , alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$ .

### Preuve

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

c.q.f.d.

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $(x) = \sqrt{x}$ .

Soit  $m$  la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[1; 4]$ .

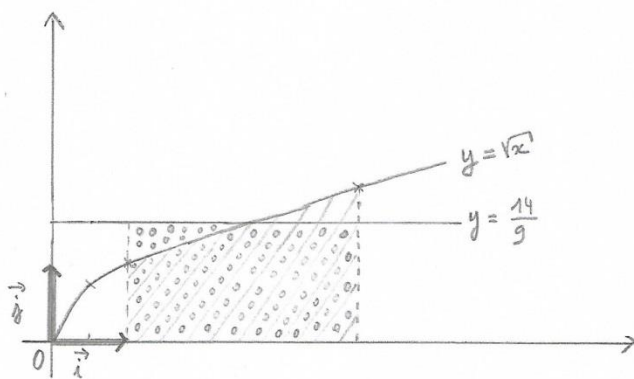
1. Calculer  $m$ .
2. Tracer la courbe  $(C_f)$  et la droite d'équation  $y = m$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'unité  $2 \text{ cm}$ .

### Résolution

1.

$$m = \frac{1}{4-1} \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} 8 - \frac{2}{3} \right) = \frac{14}{9}$$

2.



Remarque : l'aire  $///$  = l'aire  $ooo$

### Exercice 2 (facultatif)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(x) = x^2$ .

Soit  $m$  la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[1; 3]$ .

1. Calculer  $m$ .
2. Tracer la courbe  $(C_f)$  et la droite d'équation  $y = m$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'unité  $1 \text{ cm}$ .

### Solution

1.  $m = \frac{13}{3}$

## 23. Intégrales avec des exponentielles

### Exercice 1

Calculer les intégrales  $I$ .

a)  $I = \int_{-2}^2 e^{3x+4} dx$

b)  $I = \int_0^1 6te^{t^2-1} dt$

### Solution détaillée de l'exercice 1

a)  $I = \frac{1}{3} \left( e^{10} - \frac{1}{e^2} \right)$

b)  $I = 3 - \frac{3}{e}$

### Exercice 2

Calculer les intégrales  $I$ .

a)  $I = \int_3^5 9e^{-2x+7} dx$

b)  $I = \int_0^1 5(2t - 3)e^{-2t^2+6t-1} dt$

### Solution de l'exercice 2

a)  $I = \frac{-9}{2e^3} + \frac{9e}{2}$

b)  $I = \frac{5}{2e} - \frac{5e^3}{2}$

## 24. Intégrales avec des logarithmes népériens

### Exercice 1

Calculer les intégrales  $I$ .

a)  $I = \int_6^8 \frac{-3}{5x-20} dx$

b)  $I = \int_{-1}^0 \frac{6x}{x^2-4} dx$

### Solution de l'exercice 1

a)  $I = \frac{-3}{5} \ln 2$

b)  $I = 3 \ln \frac{4}{3}$

### Exercice 2

Calculer les intégrales  $I$ .

a)  $I = \int_7^9 \frac{5}{4-3x} dx$

b)  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$

### Solution de l'exercice 2

a)  $I = \frac{5}{3} \ln \frac{17}{23}$

b)  $I = \frac{3}{2} \ln \frac{e+1}{2}$

## 25.Intégration par parties

### Théorème

Soient  $I$  un intervalle réel

$a$  et  $b$  deux réels de  $I$

$u$  et  $v$  deux fonctions admettant des dérivées continues sur  $I$ .

Alors :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx .$$

### Démonstration

$$(u v)' = u'v + u v'$$

On a :  $u'$  est continue sur  $I$

$v'$  est continue sur  $I$

$u$  est continue sur  $I$  car elle y est dérivable

$v$  est continue sur  $I$  car elle y est dérivable.

De là :  $u'v$  est continue sur  $I$

$u v'$  est continue sur  $I$

$u'v + u v'$  est continue sur  $I$

$(u v)'$  est continue sur  $I$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b (u v)'(x) dx &= \int_a^b u'(x)v(x) + u(x) v'(x) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx . \end{aligned}$$

Comme  $u v$  est une primitive de  $(u v)'$ ,  $\int_a^b (u v)'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$ .

$$[u(x) v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx .$$

c.q.f.d.

### Exercice 1

Calculer  $\int_1^e x \ln x \, dx$  en utilisant une intégration par parties.

#### Solution de l'exercice 1

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

### Exercice 2

Calculer  $I$  en utilisant une intégration par parties.

a)  $I = \int_0^{\ln 2} (x + 2)e^{-x} \, dx$

b)  $I = \int_1^e \ln x \, dx$

c)  $I = \int_2^{-1} x e^{5x} \, dx$

d)  $I = \int_2^0 (2x + 1)e^x \, dx$

#### Solution de l'exercice 2

a)  $I = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

b)  $I = 1$

c)  $I = \frac{-6}{25} e^{-5} - \frac{9}{25} e^{10}$

d)  $I = -1 - 3e^2$

### Exercice 3

Calculer  $I = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$  en utilisant deux intégrations par parties.

#### Solution de l'exercice 3

$$I = e - 2$$

### Exercice 4

Calculer  $I = \int_0^{\frac{1}{3}} x^2 e^{3x} \, dx$  en utilisant deux intégrations par parties.

#### Solution de l'exercice 4

$$I = \frac{e}{27} - \frac{2}{27}$$

## 26. Déterminer une primitive par intégration

### Théorème

Soient  $I$  un intervalle réel

$a$  et  $b$  deux réels de  $I$

$f$  une fonction continue sur  $I$ .

Alors  $\int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$ .

### Démonstration

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

$$(F(x) - F(a))' = F'(x) - (F(a))' = f(x) - 0 = f(x)$$

$$(F(x) - F(a))(a) = F(a) - F(a) = 0$$

$\int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$ .

c.q.f.d.

### Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .

- Déterminer  $F$ , la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1 à l'aide d'une intégration par parties.
- Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- Vérifier que  $F(1) = 0$ .

### Solution de l'exercice 1

- $F(x) = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$
- $F'(x) = \dots = f(x)$

### Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $(x) = (x + 1) \ln x$ .

- Déterminer  $F$ , la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1 à l'aide d'une intégration par parties.
- Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- Vérifier que  $F(1) = 0$ .

### Solution de l'exercice 2

- $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \frac{x^2}{4} - x + \frac{5}{4}$

### Exercice 3

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(x) = xe^{3x}$ .

- Déterminer  $F$ , la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0 à l'aide d'une intégration par parties.
- Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Vérifier que  $F(0) = 0$ .

### Solution de l'exercice 3

- $F(x) = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{1}{9}$

## 27. Analyse - Maturitas écrites de 2015 et 2014

### Exercice 1 (2015)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$$

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , (unité graphique : 1 cm).

1. Calculer la limite de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = 2(x - 1)(\ln x - 1)$ .
3. Étudier le signe de  $f'$  et en déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 2.
5. Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ .
6. En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_1^4 (x^2 - 2x) \ln x \, dx$ .
7. En déduire, en  $\text{cm}^2$ , la valeur exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'aire du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 4$ .  
Hachurer cette région sur le graphique.

### Exercice 2 (2015)

#### Partie A.

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2xe^x - 3e^x + 3$ .

1. Vérifier que  $g'(x) = e^x(2x - 1)$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $g$  sachant que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .  
Le calcul de ces limites n'est pas demandé.
3. Sur l'intervalle  $] -\infty; \frac{1}{2} [$ , on admet que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha = 0$ .  
Montrer qu'il existe une solution unique  $\beta$  sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; +\infty [$ .  
Donner une valeur approchée de  $\beta$  à 0,1 près.
4. Dresser le tableau de signes de  $g$ .

#### Partie B.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$ .

On appelle  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

1. Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . En déduire l'existence d'une asymptote à  $(\mathcal{C})$ .
2. Montrer que  $f'(x) = (2x^2 + x - 3)e^x$ .
3. Étudier le signe de  $f'(x)$ . En déduire les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec les axes de coordonnées.
5. Montrer que la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = -3x$ .
6. Montrer que  $f(x) - (-3x) = x \cdot g(x)$ . En déduire la position relative de  $(\mathcal{C})$  et  $(T)$ .
7. Construire les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(T)$  avec soin et avec précision.

### Exercice 3 (2015)

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -1 + (1 - x)e^x$ .

- 1) On admet que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , et  $g'(x) = -xe^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 2) Justifier que  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

#### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x - 1 + (-x + 2)e^x$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique **2cm**.

- 1) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = g(x)$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Soit la droite  $(\Delta): y = -x - 1$ .
  - a) Montrer que  $(\Delta)$  est asymptote à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $-\infty$ .
  - b) Etudier la position de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- 5) Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse  $x = 0$ .
- 6) Montrer que dans l'intervalle  $]1; 2[$  l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
- 7) Construire  $(\mathcal{C}_f)$ ,  $(T)$  et  $(\Delta)$ .

#### PARTIE C

Soit  $A(t)$  l'aire du domaine du plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = 2$  et, où  $t$  est un réel strictement inférieur à  $\alpha$ .

- 1) En utilisant une intégration par parties, exprimer  $A(t)$  en fonction de  $t$ .
- 2) Déterminer la limite de  $A(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ .

### Exercice 4 (2015)

#### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire $g$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^x + 2e^x - 1$ .

- 1) On admet que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , et  $g'(x) = e^x(x + 3)$ . Déterminer le sens de variations de  $g$ .
- 2) a) Dédire de ce qui précède que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
b) Justifier que  $\alpha \in ]-0,5; -0,4[$  et donner une valeur approchée de  $\alpha$  par défaut à 0,01 près.
- 3) À l'aide de  $\alpha$ , déterminer le signe de la fonction  $g$ .

#### Partie B : Étude de la fonction $f$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x + e^x - x - 1$ .

- 1) Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2)
  - a) Montrer que  $f'(x) = g(x)$ .
  - b) En utilisant le signe de  $g(x)$  déterminer le sens de variation de  $f$ .
- 3) Écrire une équation de la tangente  $(\mathcal{T})$  à la courbe représentative  $(C_f)$  en  $O(0; 0)$ .
- 4) Démontrer que la droite  $(p)$  d'équation  $y = -x - 1$  est asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  en  $-\infty$ .
- 5) Étudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(p)$ .
- 6) Tracer dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm les droites  $(p)$ ,  $(\mathcal{T})$  et la courbe  $(C_f)$ .

#### Partie C : Calcul d'aire.

- 1) Calculer une primitive de la fonction  $d$  définie par  $d(x) = (x + 1)e^x$ .
- 2) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  en  $\text{cm}^2$  de la région du plan délimitée par la courbe  $(C_f)$ , par la droite  $(p)$ , et par les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 0$ .

### Exercice 5 (2014)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ . On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  donné en ANNEXE.

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1°) Calculer  $g'(x)$ , étudier son signe et dresser le tableau de variations de  $g$ .

(On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ )

2°) Justifier que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

3°) En déduire que  $e^x - x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Partie B

1°) a) Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2°) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b) En déduire le tableau de variations de  $f$ .

3°) a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.

b) Vérifier que  $f(x) - x = \frac{-x \cdot g(x)}{e^x - x}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c) En déduire la position relative de la courbe  $(C_f)$  et de la droite  $(T)$  (à l'aide des résultats de la Partie A).

#### Partie C

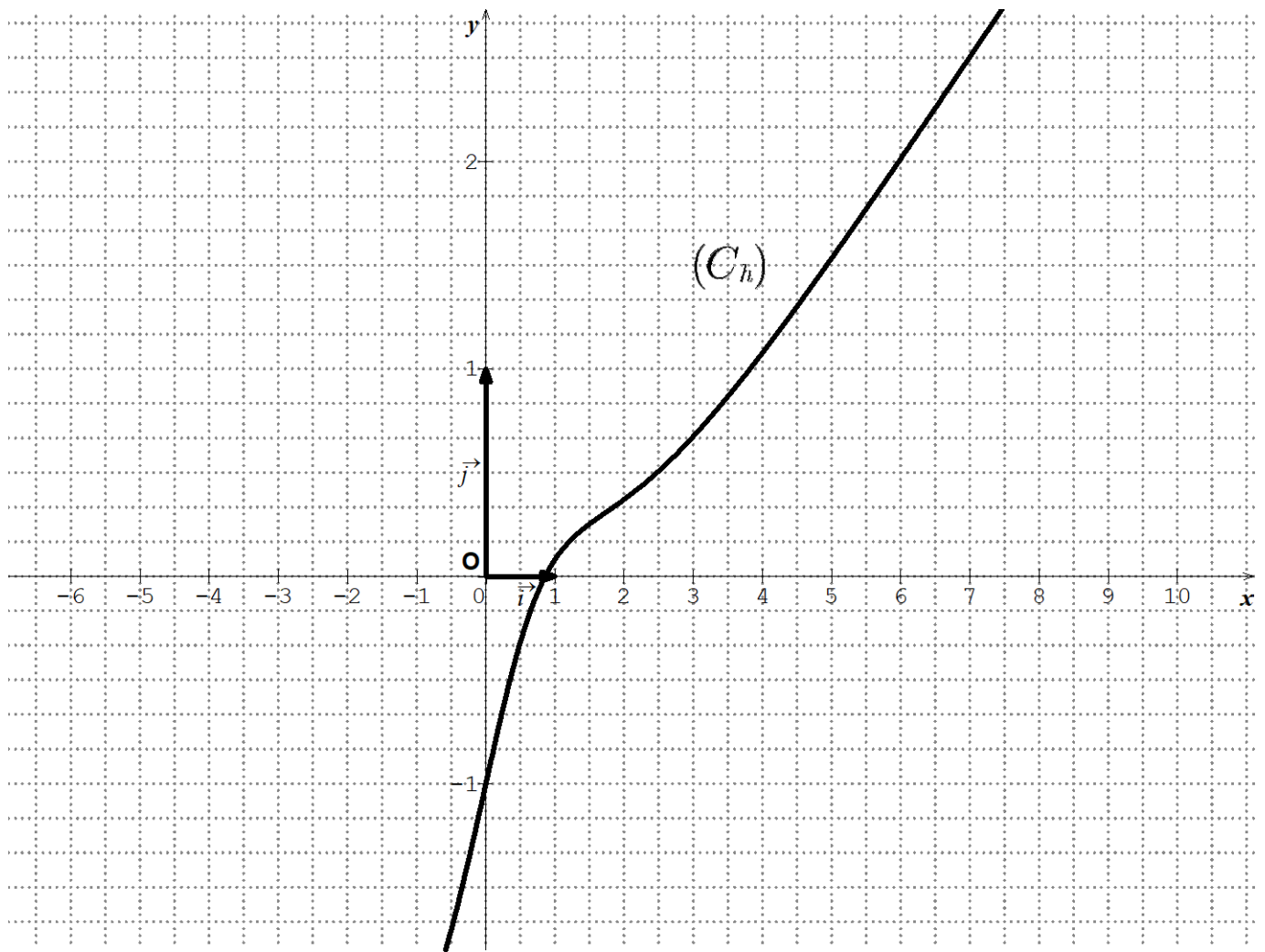
Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{xe^x - 2e^x - x^2 + 4x}{2(e^x - x)}$ . On note  $(C_h)$  sa courbe représentative qui est tracée sur l'ANNEXE.

1°) Montrer que  $h(x) - f(x) = \frac{x}{2} - 1$ .

2°) Étudier la position relative de  $(C_h)$  et  $(C_f)$ .

3°) Tracer la droite  $(T)$ , la courbe  $(C_f)$  et ses asymptotes sur l'ANNEXE.

4°) On note  $A$  l'aire du domaine délimité par  $(C_h)$ ,  $(C_f)$  et les droites d'équations  $x=2$  et  $x=3$ . Calculer  $A$  en unités d'aire. Hachurer le domaine correspondant sur l'ANNEXE.



### Exercice 6 (2014)

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$ .

1°) Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2°) a) Calculer  $g'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $g$ .

b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

Justifier l'encadrement de  $\alpha$ :  $0,6 < \alpha < 0,7$ .

c) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### Partie B

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}[x + (1 - x)e^{2x}]$ .

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1°) a) Vérifier que  $f(x) = \frac{x}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{x} - 1 \right) e^{2x} \right]$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2°) a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

b) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(D)$ .

3°) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{1}{2}g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et le tableau de variations de  $f$ .

4°) Tracer la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$ .

### Exercice 7 (2014)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} - x + 3$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

#### Partie A

On considère la fonction auxiliaire  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 2\ln(x) + x^2$ .

On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction  $g$ .

1°) a) Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $0^+$ .

b) Calculer  $g'(x)$ .

c) Dresser le tableau de variations de  $g$ .

d) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel  $\alpha > 0$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Justifier l'encadrement :  $0,7 < \alpha < 0,8$ .

2°) Dédurre des questions précédentes le signe de  $g(x)$ .

#### Partie B

1°) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $0^+$ . Interpréter le résultat graphiquement.

2°) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  on a  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ .

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3°) a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 3$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$ .

b) Etudier la position relative de  $(C)$  et  $(D)$ .

4°) Construire  $(C)$  et  $(D)$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

5°) a) Vérifier qu'une fonction primitive de  $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  est  $H(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

b) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par  $(C)$ ,  $(D)$  et les droites d'équations :  $x = 1$  et  $x = 3$ . En donner la valeur exacte en  $\text{cm}^2$  puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

### Exercice 8 (2014)

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$ .

1°) Calculer  $g'(x)$ , étudier son signe et en déduire le tableau de variations de  $g$  (on admet que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty).$$

2°) Justifier que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1°) Déterminer la limite de  $f$  en  $0^+$ . Interpréter graphiquement le résultat.

2°) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3°) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe  $(C)$  en  $+\infty$ .

4°) Déterminer la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$  sur  $]0; +\infty[$ .

5°) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ .

b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et le tableau de variations de  $f$ .

6°) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $]0; +\infty[$  une solution unique que l'on notera  $\alpha$ . Justifier l'encadrement :  $0,34 < \alpha < 0,35$ .

7°) Construire  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

## 28. Inégalités des accroissements finis

### Théorème

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  (contenant au moins deux nombres).

S'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $m \leq f'(x) \leq M$  sur  $I$ , alors pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$  avec

$$a \leq b : \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

### Preuve

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  $g(x) = Mx - f(x)$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $I$  et pour tout réels  $x$  de  $I$  :  $g'(x) = M - f'(x)$ .

Comme  $f'(x) \leq M$  alors  $g'(x) \geq 0$ .

La fonction  $g$  est croissante sur  $I$ .

Comme  $a \leq b$ , alors  $g(a) \leq g(b)$

$$Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$$

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

On démontre de même l'inégalité  $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$  en définissant sur  $I$  la fonction  $h$  par  $h(x) = mx - f(x)$ .

c.q.f.d.

### Remarque :

Les 3 exercices suivants viennent du livre « MATH Term S Obligatoire –Nouveau Transmath», NATHAN, 1994.

Le premier exercice est l'exercice résolu de la page 72.

Le deuxième exercice vient de l'exercice 62 de la page 91.

Le troisième exercice est l'exercice 61 de la page 91.

### Exercice 1

1. En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction  $f: x \mapsto \sqrt{1+x}$ , prouvez que : pour tout  $x$  de l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ,  $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$  (1).
2.
  - a. Interprétez graphiquement ce résultat.
  - b. Déduisez de (1) un encadrement de  $\sqrt{1,1}$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

### Solution de l'exercice 1

1.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]-1; +\infty]$  et pour tout  $x \in ]-1; +\infty]$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ .

Pour tout  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 &\leq 1+x \leq \frac{3}{2} \\ 1 &\leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 2 &\leq 2\sqrt{1+x} \leq 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} &\leq f'(x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Appliquons les inégalités des accroissements finis avec  $a = 0$  et  $b = x$  :

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(x-0) &\leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}(x-0) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}x &\leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x \\ 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} &\leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

2.

a.

Interprétation graphique : la courbe représentative de  $f$  restreinte à  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  est entre la droite d'équation  $y = \frac{x}{\sqrt{6}} + 1$  et la droite d'équation  $y = \frac{x}{2} + 1$ .

b.

Lorsque  $x = 0,1$ , on déduit de (1) que :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{0,1}{\sqrt{6}} &\leq f(0,1) \leq 1 + \frac{0,1}{2} \\ 1,04 &\leq 1,1 \leq 1,05. \end{aligned}$$

### Exercice 2

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  par  $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$ .

1. Montrez que, pour tout  $x \in [1; 2]$ ,  $\frac{5}{9} \leq f'(x) \leq 5$ .
2. Déduisez-en un encadrement de  $f(x) - f(1)$  sur  $[1; 2]$ , puis un encadrement de  $f$  par deux fonctions affines  $g$  et  $h$  sur  $[1; 2]$ .

### Exercice 3

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

On sait seulement que  $f(0) = 0$  et que, pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ . Déduisez-en le signe de  $f(x)$ .
2. Montrez que sur  $\mathbb{R}$ ,  $0 \leq f'(x) \leq 1$ .
3.  $x$  est un réel positif.  
À l'aide des inégalités des accroissements finis appliquées à l'intervalle  $[0; x]$ , montrez que :  
 $0 \leq f(x) \leq x$ .

## 29. Solutions détaillées

### Dérivées

Solution de l'exercice 1

a)

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car tous les polynômes sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{3x^2 - 4x + 1}{2} \right)' = \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{2}x + \frac{1}{2} \right)' = \left( \frac{3}{2}x^2 \right)' - \left( \frac{4}{2}x \right)' + \left( \frac{1}{2} \right)' \\ &= \frac{3}{2}(x^2)' - \frac{4}{2}(x)' + 0 = \frac{3}{2}2x - 2(1) = 3x - 2 \end{aligned}$$

Remarque :

$x \mapsto x$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto x \cdot x$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto \frac{3}{2}$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto \frac{3}{2}x^2$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto 2$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto 2x$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 2x$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto \frac{1}{2}$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

b)

$x \mapsto 2x + 3$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$  car tous les polynômes sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto x^2 - x - 6$  est dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, x^2 - x - 6 \neq 0$$

$x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-x-6}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2x+3}{x^2-x-6} \right)' = \frac{(2x+3)'(x^2-x-6) - (2x+3)(x^2-x-6)'}{(x^2-x-6)^2} \\ &= \frac{2(x^2-x-6) - (2x+3)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = \frac{2x^2-2x-12 - (4x^2-2x+6x-3)}{(x^2-x-6)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x-12-4x^2-4x+3}{(x^2-x-6)^2} = \frac{-2x^2-6x-9}{(x^2-x-6)^2} \end{aligned}$$

c)

$x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme.

$t \mapsto t^6$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 3x + 4 \in \mathbb{R}$$

$x \mapsto (2x^2 - 3x + 4)^6$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = ((2x^2 - 3x + 4)^6)' = 6(2x^2 - 3x + 4)^5(2x^2 - 3x + 4)' = 6(2x^2 - 3x + 4)^5(4x - 3)$$

d)

$x \mapsto 3x + 2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme.

$t \mapsto \sqrt{t}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$3x + 2 \in ]0; +\infty[ \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{-2}{3}; +\infty \right[$$

$$\forall x \in \left] \frac{-2}{3}; +\infty \right[, 3x + 2 \in ]0; +\infty[$$

$x \mapsto \sqrt{3x + 2}$  est dérivable sur  $\left] \frac{-2}{3}; +\infty \right[$

$$f'(x) = (\sqrt{3x + 2})' = \frac{1}{2\sqrt{3x + 2}} (3x + 2)' = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$$

e)

$x \mapsto -2x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme.

$t \mapsto \sqrt{t}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$-2x \in ]0; +\infty[ \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow 0 > x \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 0[$$

$$\forall x \in ]-\infty; 0[, -2x \in ]0; +\infty[$$

$x \mapsto \sqrt{-2x}$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[$

$x \mapsto 2x + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}, 2x + 1 \neq 0$$

$x \mapsto \frac{\sqrt{-2x}}{2x+1}$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[ \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{\sqrt{-2x}}{2x+1} \right)' = \frac{(\sqrt{-2x})'(2x+1) - (\sqrt{-2x})(2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{(-2x)'}{2\sqrt{-2x}}(2x+1) - (\sqrt{-2x})2}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{-2}{2\sqrt{-2x}}(2x+1) - (\sqrt{-2x})2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{-1}{\sqrt{-2x}}(2x+1) - 2(\sqrt{-2x})}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{-2x-1}{\sqrt{-2x}} - 2\sqrt{-2x}}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

## Tangentes

Solution détaillée de l'exercice 1

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^3)'(x-1)^2 - x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^2)^2} = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)1}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(3(x-1) - 2x)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

b)

$$(t): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$(t): y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{((-2)-1)^2} = \frac{-8}{9}$$

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2((-2)-3)}{((-2)-1)^3} = \frac{4(-5)}{(-3)^3} = \frac{-20}{-27} = \frac{20}{27}$$

$$(t): y = \frac{20}{27}(x + 2) + \frac{-8}{9}$$

$$(t): y = \frac{20}{27}x + \frac{40}{27} + \frac{-24}{27}$$

$$(t): y = \frac{20}{27}x + \frac{16}{27}$$

c)

$$A(-2; f(-2)) \text{ ou } A\left(-2; \frac{20}{27}(-2) + \frac{16}{27}\right)$$

$$A\left(-2; \frac{-8}{9}\right)$$

d)

Le coefficient directeur de la droite ( $d$ ) est égal à 1.

e)

La droite (s) est tangente à la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) alors le coefficient directeur de (s) est égal à  $f'(x)$ .

Le coefficient directeur de la droite (s) est égal au coefficient directeur de la droite (d)

$$\Leftrightarrow f'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} - \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} - \frac{C_3^0 x^3 (-1)^0 + C_3^1 x^2 (-1)^1 + C_3^2 x^1 (-1)^2 + C_3^3 1 (-1)^3}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} - \frac{1x^3 + 3x^2(-1) + 3x1 + 1.1(-1)}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} - \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x + 1}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$(s): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$(s): y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right)^2} = \frac{\frac{1}{27}}{\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{27}}{\left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$(s): y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{12}$$

$$(s): y = x - \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$$

$$(s): y = x - \frac{3}{12}$$

$$(s): y = x - \frac{1}{4}$$

## Limites avec la fonction logarithme népérien

Solution détaillée de l'exercice 1

a)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \end{cases}$$

d'où par la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^3 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(4)}_{4} \underbrace{(\ln x^3)}_{+\infty} = +\infty$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(4)}_{4} \underbrace{(\ln x^3)}_{+\infty} = +\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\underbrace{\ln x}_{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}} = -\infty$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{0}{\underset{\uparrow}{x}} - \overset{-\infty}{\underset{\uparrow}{\ln x}}}{\underset{\downarrow}{\underset{0^+}{x}}} = +\infty$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underset{\downarrow}{\underset{+\infty}{x}} - \underset{\downarrow}{\underset{+\infty}{\ln x}} \text{ donne la FI "}\infty - \infty\text{"}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underset{\downarrow}{\underset{+\infty}{x}} \left( \underset{\downarrow}{\underset{1}{1}} - \underset{\downarrow}{\underset{0}{\frac{\ln x}{x}}} \right) = +\infty$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underset{\downarrow}{\underset{0}{x^3}} \underset{\downarrow}{\underset{-\infty}{\ln x}} \text{ donne la FI "0} \cdot \infty\text{"}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \underset{\downarrow}{\underset{0}{x^2}} \underset{\downarrow}{\underset{0}{x \ln x}} = 0$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} \quad \text{donne la FI } \frac{\infty}{\infty}.$$

Diagram: A circle containing  $\ln x$  with an arrow pointing to  $+\infty$ . Below it, a circle containing  $x^3$  with an arrow pointing to  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

Diagram: A circle containing  $1$  with an arrow pointing to  $1$ . Below it, a circle containing  $3x^2$  with an arrow pointing to  $+\infty$ . To the right, a circle containing  $\frac{\ln x}{x}$  with an arrow pointing to  $0$ .

g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-4x+1)}{x} \quad \text{donne la FI } \frac{0}{0}.$$

Diagram: A circle containing  $\ln(-4x+1)$  with an arrow pointing to  $0$ . Below it, a circle containing  $x$  with an arrow pointing to  $0$ .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} -4x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \end{cases}$$

d'où par le théorème de la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-4x+1)}{-4x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-4x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-4x+1)}{-4x} \cdot (-4) = -4$$

Diagram: A circle containing  $\frac{\ln(-4x+1)}{-4x}$  with an arrow pointing to  $1$ . To the right, a circle containing  $(-4)$  with an arrow pointing to  $-4$ .

## Limites avec la fonction exponentielle

Solution détaillée de l'exercice 1

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$$

Diagram illustrating the limit:  $e^x \rightarrow +\infty$  and  $e^{-x} \rightarrow 0$ .

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 3e^x$$

Diagram illustrating the limit:  $e^{2x} \rightarrow +\infty$  and  $3e^x \rightarrow +\infty$ . The text "donne la FI '∞-∞'" is written next to the expression.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3) = +\infty$$

Diagram illustrating the limit:  $e^x \rightarrow +\infty$  and  $3 \rightarrow 3$ .

c)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  donne la FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$

d)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot e^{-x}$  donne la FI " $\infty \cdot 0$ "

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x}} = 0$

e)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(x+1)}_{-\infty} \underbrace{e^x}_0 \text{ donne la FI "}\infty \cdot 0\text{"}.$$

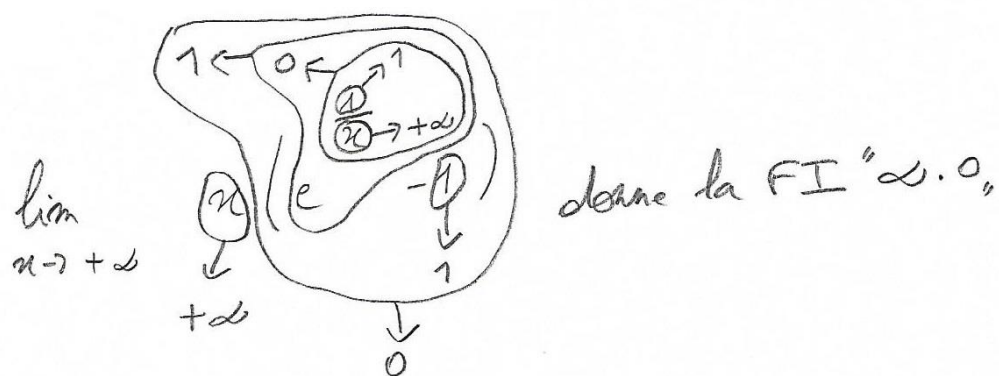
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x e^x}_0 + \underbrace{e^x}_0 = 0$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\nearrow 0}{e^x - 1}}{\underbrace{2x}_{\rightarrow 0}} \text{ donne la FI "}\frac{0}{0}\text{"}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_1 = \frac{1}{2}$$

g)



$$\forall x > 0 : f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \end{array} \right.$$

Par le théorème de la limite d'une composée de fonctions :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$ .

## Calculer une limite à l'aide de la dérivée

Solution détaillée l'exercice 1

f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \text{ donne la FI } \frac{0}{0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ en posant } f(x) = \tan x$$

$$= f'(0)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 0} \quad \text{car } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{1^2}$$

$$= 1$$

g)

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}$ 
 $\frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$ 
 donne la FI " $\frac{0}{0}$ ".

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2(\sin x - \frac{1}{2})}{6(x - \frac{\pi}{6})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \frac{1}{3} \quad \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

En effet:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$  en posant  $f(x) = \sin x$   
 $= f'(\frac{\pi}{6})$   
 $= \cos \frac{\pi}{6}$  car  $f'(x) = \cos x$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

## Primitives usuelles

Solution détaillée de l'exercice 1

a)  $f(x) = x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 10$

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - 7\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 10x$$

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{7}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 10x$$

b)  $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3x^{-2} + x^{\frac{-1}{2}}$

$$F(x) = 3\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}$$

$$F(x) = \frac{-3}{x} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-3}{x} + 2\sqrt{x}$$

c)  $f(x) = (3x+2)^7 = \frac{1}{3}3(3x+2)^7 = \frac{1}{3}u'u^7$

$$F(x) = \frac{1}{3}\frac{u^8}{8}$$

$$F(x) = \frac{1}{24}(3x+2)^8$$

d)  $f(x) = 18x(3x^2-2)^4 = 3(6x)(3x^2-2)^4 = 3u'u^4$

$$F(x) = 3\frac{u^5}{5}$$

$$F(x) = \frac{3}{5}(3x^2-2)^5$$

e)  $f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{4}\right)(x^4+x)^5 = \frac{1}{4}(4x^3+1)(x^4+x)^5 = \frac{1}{4}u'u^5$

$$F(x) = \frac{1}{4}\frac{u^6}{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{24}(x^4+x)^6$$

f)  $f(x) = \frac{4x-6}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{2(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = 2\frac{u'}{u^2} = 2u'u^{-2}$

$$F(x) = 2\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-2}{u} = \frac{-2}{x^2-3x+2}$$

a)  $I = ]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$$

$$F(x) = 2 \frac{x^{-1}}{-1} + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{-2}{x} + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$F(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-2}{1} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

$$F(x) = \frac{-2}{x} + 2$$

b)  $I = \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^2(x^3 + 6) = u'u$$

$$F(x) = \frac{u^2}{2} + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{(x^3+6)^2}{2} + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$F(-1) = 3 \quad \Leftrightarrow \frac{((-1)^3+6)^2}{2} + c = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5)^2}{2} + c = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{2} + c = 3$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{6}{2} - \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-19}{2}$$

$$F(x) = \frac{(x^3 + 6)^2}{2} - \frac{19}{2}$$

## Calculs d'aires

Solution détaillée de l'exercice 3

1.

$$T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$T: y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$f'(x) = 2x - 10$$

$$f'(4) = 2 \times 4 - 10 = -2$$

$$f(4) = 4^2 - 10 \times 4 + 25 = 16 - 40 + 25 = 1$$

$$T: y = -2(x - 4) + 1$$

$$T: y = -2x + 9$$

2.

$$(FD): y = mx + p$$

$$\begin{cases} D \in (FD) \\ F \in (FD) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = m \cdot 4 + p \\ 4 = m \cdot 7 + p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m = p \\ 4 = m \cdot 7 + (1 - 4m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 - 4m \\ 3 = 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 - 4(1) \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -3 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$(FD): y = x - 3$$

3.

Soit  $\mathcal{A}_1$  l'aire du domaine délimité par la droite d'équation  $x = 1$ , la parabole  $\mathcal{P}$  et la tangente  $T$ .

Soit  $\mathcal{A}_{1a}$  l'aire du domaine délimité par la droite d'équation  $x = 1$ , la parabole  $\mathcal{P}$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = 4$ .

Soit  $\mathcal{A}_{1b}$  l'aire du domaine délimité par la droite d'équation  $x = 1$ , la tangente  $T$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = 4$ .

On a :  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{1a} - \mathcal{A}_{1b}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 (-2x + 9) dx \\
 &= \int_1^4 (f(x) - (-2x + 9)) dx \\
 &= \int_1^4 (x^2 - 10x + 25 - (-2x + 9)) dx \\
 &= \int_1^4 (x^2 - 8x + 16) dx \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} - 8 \frac{x^2}{2} + 16x \right]_1^4 \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_1^4 \\
 &= \left( \frac{4^3}{3} - 4 \times 4^2 + 16 \times 4 \right) - \left( \frac{1^3}{3} - 4 \times 1^2 + 16 \times 1 \right) \\
 &= \left( \frac{64}{3} - 64 + 64 \right) - \left( \frac{1}{3} - 4 + 16 \right) \\
 &= \frac{63}{3} - 12 \\
 &= \frac{63}{3} - \frac{36}{3} \\
 &= \frac{27}{3} \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

...

$$\mathcal{A}_2 = \dots = \frac{9}{2}$$

...

$$\mathcal{A}_3 = \dots = \frac{26}{3}$$

$$\text{L'aire du domaine en vert} = \dots = \frac{133}{6} = \frac{133}{6} \text{ u. a.}$$

## Intégrales avec des exponentielles

Solution détaillée de l'exercice 1

$$\text{a) } f(x) = e^{3x+4} = \frac{1}{3} 3 e^{3x+4} = \frac{1}{3} u' e^u$$

$$F(x) = \frac{1}{3} e^u = \frac{1}{3} e^{3x+4}$$

$$I = \int_{-2}^2 e^{3x+4} dx = \left[ \frac{1}{3} e^{3x+4} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{3} e^{3(2)+4} - \frac{1}{3} e^{3(-2)+4} = \frac{1}{3} e^{10} - \frac{1}{3} e^{-2} = \frac{1}{3} \left( e^{10} - \frac{1}{e^2} \right)$$

$$\text{b) } f(t) = 6te^{t^2-1} = 3 \times 2te^{t^2-1} = 3 u' e^u$$

$$F(t) = 3 e^u = 3 e^{t^2-1}$$

$$I = \int_0^1 6te^{t^2-1} dt = \left[ 3 e^{t^2-1} \right]_0^1 = 3 e^{(1)^2-1} - 3 e^{(0)^2-1} = 3 e^0 - 3 e^{-1} = 3 - \frac{3}{e}$$

Solution détaillée de l'exercice 2

$$\text{a) } f(x) = 9e^{-2x+7} = \frac{9}{-2} (-2)e^{-2x+7} = \frac{-9}{2} u' e^u$$

$$F(x) = \frac{-9}{2} e^u = \frac{-9}{2} e^{-2x+7}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_3^5 9e^{-2x+7} dx = \left[ \frac{-9}{2} e^{-2x+7} \right]_3^5 = \frac{-9}{2} e^{-2(5)+7} - \frac{-9}{2} e^{-2(3)+7} = \frac{-9}{2} e^{-3} + \frac{9}{2} e^1 \\ &= \frac{-9}{2e^3} + \frac{9e}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) = 5(2t-3)e^{-2t^2+6t-1} = 5 \frac{-1}{2} (-4t+6)e^{-2t^2+6t-1} = \frac{-5}{2} u' e^u$$

$$F(x) = \frac{-5}{2} e^u = \frac{-5}{2} e^{-2t^2+6t-1}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 5(2t-3)e^{-2t^2+6t-1} dx = \left[ \frac{-5}{2} e^{-2t^2+6t-1} \right]_0^1 \\ &= \frac{-5}{2} e^{-2(1)^2+6(1)-1} - \frac{-5}{2} e^{-2(0)^2+6(0)-1} = \frac{-5}{2} e^3 + \frac{5}{2} e^{-1} \\ &= \frac{5}{2e} - \frac{5e^3}{2} \end{aligned}$$

## Intégrales avec des logarithmes népériens

Solution détaillée de l'exercice 1

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \frac{-3}{5x-20} = \frac{-3}{5} \frac{5}{5x-20} = \frac{-3}{5} \frac{u'}{u} \\
 5x - 20 < 0 &\Leftrightarrow x < 4 \\
 5x - 20 = 0 &\Leftrightarrow x = 4 \\
 5x - 20 > 0 &\Leftrightarrow x > 4 \\
 F(x) &= \frac{-3}{5} \ln(|u|) = \frac{-3}{5} \ln(|5x - 20|) = \frac{-3}{5} \ln(5x - 20) \\
 F &\text{ est une primitive de } f \text{ sur } ]4; +\infty[ \\
 F &\text{ est une primitive de } f \text{ sur } [6; 8] \\
 I &= \int_6^8 \frac{-3}{5x-20} dx = \left[ \frac{-3}{5} \ln(5x-20) \right]_6^8 = \frac{-3}{5} \ln(5(8)-20) - \frac{-3}{5} \ln(5(6)-20) \\
 I &= \frac{-3}{5} \ln(20) - \frac{-3}{5} \ln(10) = \frac{-3}{5} (\ln(20) - \ln(10)) = \frac{-3}{5} \ln \frac{20}{10} = \frac{-3}{5} \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(x) &= \frac{6x}{x^2-4} = 3 \frac{2x}{x^2-4} = 3 \frac{u'}{u} \\
 x^2 - 4 < 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \\
 x^2 - 4 = 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2 \\
 x^2 - 4 > 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[ \\
 F(x) &= 3 \ln(|u|) = 3 \ln(|x^2 - 4|) = 3 \ln(-(x^2 - 4)) = 3 \ln(-x^2 + 4) \\
 F &\text{ est une primitive de } f \text{ sur } ]-2; 2[ \\
 F &\text{ est une primitive de } f \text{ sur } [-1; 0] \\
 I &= \int_{-1}^0 \frac{6x}{x^2-4} dx = [3 \ln(-x^2 + 4)]_{-1}^0 = 3 \ln(-(0)^2 + 4) - 3 \ln(-(-1)^2 + 4) \\
 I &= 3 \ln(4) - 3 \ln(3) = 3(\ln(4) - \ln(3)) = 3 \ln \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Solution détaillée de l'exercice 2

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \frac{5}{4-3x} = \frac{5}{-3} \frac{-3}{4-3x} = \frac{-5}{3} \frac{u'}{u} \\
 F(x) &= \frac{-5}{3} \ln|u| = \frac{-5}{3} \ln|4-3x| = \frac{-5}{3} \ln(-(4-3x)) = \frac{-5}{3} \ln(3x-4) \\
 F &\text{ est une primitive de } f \text{ sur } [7; 9] \\
 I &= \int_7^9 \frac{5}{4-3x} dx = \left[ \frac{-5}{3} \ln(3x-4) \right]_7^9 = \frac{-5}{3} \ln(3(9)-4) - \frac{-5}{3} \ln(3(7)-4) \\
 &= \frac{-5}{3} \ln(23) - \frac{-5}{3} \ln(17) = \frac{5}{3} (-\ln(23) + \ln(17)) = \frac{5}{3} \ln \frac{17}{23} \\
 \text{b) } I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1} dx \\
 f(x) &= \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{3}{2} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{3}{2} \frac{u'}{u} \\
 F(x) &= \frac{3}{2} \ln|u| = \frac{3}{2} \ln|e^{2x}+1| = \frac{3}{2} \ln(e^{2x}+1) \\
 F &\text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \\
 I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \left[ \frac{3}{2} \ln(e^{2x}+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \ln(e^{2(\frac{1}{2})}+1) - \frac{3}{2} \ln(e^{2(0)}+1) \\
 &= \frac{3}{2} \ln(e^1+1) - \frac{3}{2} \ln(1+1) = \frac{3}{2} (\ln(e+1) - \ln 2) = \frac{3}{2} \ln \frac{e+1}{2}
 \end{aligned}$$

## Intégration par parties

Solution détaillée de l'exercice 1

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Posons  $u'(x) = x$  et  $v(x) = \ln x$ .

Choisissons  $u(x) = \frac{x^2}{2}$ . De plus on a  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \left( \frac{e^2}{2} \ln e \right) - \left( \frac{1^2}{2} \ln 1 \right) - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - 0 - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left( \frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Solution détaillée de l'exercice 2

a)

$$I = \int_0^{\ln 2} (x+2)e^{-x} dx$$

$$u'(x) = e^{-x} \quad v(x) = x+2$$

$$u(x) = -e^{-x} \quad v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} I &= [-e^{-x}(x+2)]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} -e^{-x} 1 dx = [-e^{-x}(x+2)]_0^{\ln 2} - [e^{-x}]_0^{\ln 2} \\ &= -e^{-\ln 2}(\ln 2 + 2) - (-e^{-0}(0+2)) - [e^{-\ln 2} - e^{-0}] \\ &= -2^{-1}(\ln 2 + 2) + 2 - 2^{-1} + 1 = \frac{-\ln 2}{2} - 1 + 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

b)

$$I = \int_1^e \ln x dx$$

$$u'(x) = 1 \quad v(x) = \ln x$$

$$u(x) = x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} I &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e \\ &= e \ln e - 1 \ln 1 - [e - 1] = e - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

c)

$$I = \int_2^{-1} x e^{5x} dx$$

$$u'(x) = e^{5x} \quad v(x) = x$$

$$u(x) = \frac{e^{5x}}{5} \quad v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{e^{5x}}{5} x \right]_2^{-1} - \int_2^{-1} \frac{e^{5x}}{5} 1 dx = \left[ \frac{e^{5x}}{5} x \right]_2^{-1} - \left[ \frac{e^{5x}}{25} \right]_2^{-1} \\ &= \frac{e^{5(-1)}}{5} (-1) - \frac{e^{5(2)}}{5} (2) - \left[ \frac{e^{5(-1)}}{25} - \frac{e^{5(2)}}{25} \right] = \frac{-e^{-5}}{5} - \frac{2e^{10}}{5} - \frac{e^{-5}}{25} + \frac{e^{10}}{25} \\ &= \frac{-6}{25} e^{-5} - \frac{9}{25} e^{10} \end{aligned}$$

d)

$$I = \int_2^0 (2x+1)e^x dx$$

$$u'(x) = e^x \quad v(x) = 2x+1$$

$$u(x) = e^x \quad v'(x) = 2$$

$$\begin{aligned} I &= [e^x(2x+1)]_2^0 - \int_2^0 e^x 2 dx = [e^x(2x+1)]_2^0 - [2e^x]_2^0 \\ &= e^0(2(0)+1) - e^2(2(2)+1) - [2e^0 - 2e^2] = 1 - 5e^2 - 2 + 2e^2 \\ &= -1 - 3e^2 \end{aligned}$$

Solution détaillée de l'exercice 3

$$\int_a^b u' v dx = [u v]_a^b - \int_a^b u v' dx$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\begin{array}{ll} u' = e^x & v = x^2 \\ u = e^x & v' = 2x \end{array}$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx$$

$$\text{Soit } J = \int_0^1 2x e^x dx.$$

$$\begin{array}{ll} u' = e^x & v = 2x \\ u = e^x & v' = 2 \end{array}$$

$$J = [2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = [2x e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1$$

$$\begin{aligned} I &= [x^2 e^x]_0^1 - ([2x e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1) \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - [2x e^x]_0^1 + [2e^x]_0^1 \\ &= (1^2 e^1) - (0^2 e^0) - ((2 \cdot 1 \cdot e^1) - (2 \cdot 0 \cdot e^0)) + (2e^1) - (2e^0) \\ &= e - 0 - (2e - 0) + 2e - 2 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

Solution détaillée de l'exercice 4

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} x^2 e^{3x} dx$$

$$\begin{array}{ll} u' = e^{3x} & v = x^2 \\ u = \frac{e^{3x}}{3} & v' = 2x \end{array}$$

$$I = \left[ \frac{e^{3x}}{3} x^2 \right]_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{3} 2x dx$$

$$\text{Posons } J = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{3} 2x dx.$$

$$\begin{array}{ll} u' = e^{3x} & v = \frac{2x}{3} \\ u = \frac{e^{3x}}{3} & v' = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[ \frac{e^{3x}}{3} \frac{2x}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{3} \frac{2}{3} dx = \left[ \frac{2x e^{3x}}{9} \right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[ \frac{2e^{3x}}{27} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} e^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{9} - \frac{2(0) e^{3(0)}}{9} - \left[ \frac{2e^{\frac{1}{3}}}{27} - \frac{2e^{3(0)}}{27} \right] \\ &= \frac{2e}{27} - \frac{2e}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$I = \left[ \frac{e^{3x}}{3} x^2 \right]_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{3} 2x dx = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{e^{3(0)}}{3} (0)^2 - \frac{2}{27} = \frac{e}{27} - \frac{2}{27}$$

## Déterminer une primitive par intégration

Solution détaillée de l'exercice 1

a)

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$$

$$\int_a^b u' v dt = [u v]_a^b - \int_a^b u v' dt$$

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \quad v(t) = \ln t$$

$$u(t) = \frac{-1}{t} \quad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt &= \left[ \frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dx = \left[ \frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \left[ \frac{1}{t} \right]_1^x = \frac{-\ln x}{x} - \frac{-\ln 1}{1} - \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \end{aligned}$$

$$b) F'(x) = \left( \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \right)' = \frac{\frac{-1}{x}x - (-\ln x)1}{x^2} - \frac{-1}{x^2} = \frac{-1 + \ln x + 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$c) F(1) = \frac{-\ln 1}{1} - \frac{1}{1} + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

Solution détaillée de l'exercice 2

$$f(x) = (x + 1) \ln x$$

a)

$$F(x) = \int_1^x (t + 1) \ln t dt$$

$$u'(t) = t + 1 \quad v(t) = \ln t$$

$$u(t) = \frac{t^2}{2} + t \quad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \int_1^x (t + 1) \ln t dt &= \left[ \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \ln t \right]_1^x - \int_1^x \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \frac{1}{t} dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - 0 - \int_1^x \frac{t}{2} + 1 dx \\ &= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left[ \frac{t^2}{4} + t \right]_1^x = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left[ \frac{x^2}{4} + x - \left( \frac{1^2}{4} + 1 \right) \right] \\ &= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - x + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

b)

$$F'(x) = (x + 1) \ln x + \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \frac{1}{x} - \frac{x}{2} - 1 = (x + 1) \ln x + \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} - 1 = (x + 1) \ln x = f(x)$$

c)

$$F(1) = \left( \frac{1^2}{2} + 1 \right) \ln 1 - \frac{1^2}{4} - 1 + \frac{5}{4} = 0$$

Solution détaillée de l'exercice 3

$$f(x) = xe^{3x}$$

a)

$$F(x) = \int_0^x te^{3t} dt$$

$$u'(t) = e^{3t}$$

$$v(t) = t$$

$$u(t) = \frac{e^{3t}}{3}$$

$$v'(t) = 1$$

$$\begin{aligned} \int_1^x te^{3t} dt &= \left[ \frac{e^{3t}}{3} t \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{3t}}{3} 1 dx = \frac{e^{3x}}{3} x - \left[ \frac{e^{3t}}{9} \right]_0^x = \frac{e^{3x}}{3} x - \left[ \frac{e^{3x}}{9} - \frac{e^{3(0)}}{9} \right] \\ &= \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

b)

$$F'(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{x}{3}e^{3x}3 - \frac{e^{3x}}{9}3 = xe^{3x} = f(x)$$

c)

$$F(0) = 0e^0 = 0$$